Vecteurs aléatoires à représentation matricielle : Une rencontre entre Matrix Product Ansatz et Hidden Markov Models

Florian Angeletti

Jeudi 12 Septembre2013

Présentation

Thèse : "Sommes et extrêmes en physique statistique et traitement du signal"
Directeurs: Eric Bertin and Patrice Abry.

Thèmes: Application de la physique statistique au traitement du signal

- Transition de phase dans l'estimation des moments
- Statistiques des extrêmes
- Vecteurs aléatoires à représentation matricielle

Présentation

Thèse : "Sommes et extrêmes en physique statistique et traitement du signal"
Directeurs: Eric Bertin and Patrice Abry.

Thèmes: Application de la physique statistique au traitement du signal

- Transition de phase dans l'estimation des moments
- Statistiques des extrêmes
- Vecteurs aléatoires à représentation matricielle

Vecteurs aléatoires

Vecteurs aléatoires en traitement du signal

- Densité de probabilité jointe : $\mathbb{P}(x_1, \ldots, x_n)$
- Vecteurs aléatoires i.i.d.: $\mathbb{P}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1) \ldots f(x_n)$
- généralisation non-i.i.d. ?

Vecteurs aléatoires

Vecteurs aléatoires en traitement du signal

- Densité de probabilité jointe : $\mathbb{P}(x_1, \dots, x_n)$
- Vecteurs aléatoires i.i.d.: $\mathbb{P}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) \dots f(x_n)$
- généralisation non-i.i.d. ?

Physique hors-équilibre

- Asymmetric Simple Exclusion Process model [Derrida et al., *J. Phys. A*, 1993]
- $p(x_1, \dots, x_n) \propto \mathcal{R}(x_1) \dots \mathcal{R}(x_n)$: f scalaire $\Rightarrow$ $\mathcal{R}$ matrice
- Structure en produit préservée.
- Applications en traitement du signal?

Outline

1. Introduction: Du modèle ASEP aux Hidden Markov Models
2. Dualité représentation matricielle/ Modèle à chaîne de Markov cachée
   - Représentation matricielle
   - Chaîne de Markov cachée
3. Propriétés statistiques
   - Corrélation
   - Stationnarité
4. Construction de vecteurs aléatoires
   - Construction de série temporelle
   - Construction de vecteur aléatoire
5. Lois limites pour la somme
   - Introduction
   - Cas primordiaux
   - Cas général
6. Conclusion

Représentation matricielle

$$p(x_1, \dots, x_n) = \frac{\mathcal{L}\left(\mathcal{R}(x_1)\dots\mathcal{R}(x_n)\right)}{\mathcal{L}\left(\mathcal{E}^n\right)}$$

- $\mathcal{L}(M) = \mathrm{tr}(\mathcal{A}^T M)$
  - $\mathcal{A}$: matrice $d \times d$ positive
- $\mathcal{R}(x)$: fonction matricielle $d \times d$ positive
  - matrice de structure $\mathcal{E} = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{R}(x)dx$
  - matrice de densités de probabilité $\mathcal{P}_{i,j}(x) = \mathcal{R}(x)/\mathcal{E}_{i,j}$

- $d > 1$: Non-commutativité $\Rightarrow$ Dépendance

Covariance et fonctions de dépendance d'ordre supérieure

Matrice des moments : $M(q) = \int x^q \mathcal{R}(x) dx$

Moment à p-points d'ordres q_r aux positions k_r :

$$\mathbb{E}\left[X_{k_1}^{q_1} \dots X_{k_p}^{q_p}\right] = \frac{\mathcal{L}\left(\mathcal{E}^{k_1-1} M(q_1) \dots M(q_{r-1}) \mathcal{E}^{k_r - k_{r-1} - 1} M(q_r) \dots M(q_p) \mathcal{E}^{n-k_p}\right)}{\mathcal{L}(\mathcal{E}^n)}.$$

Variable aléatoire cachée

$$p(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\mathcal{L}\left(\mathcal{R}(x_1)\ldots\mathcal{R}(x_n)\right)}{\mathcal{L}\left(\mathcal{E}^n\right)}$$

- En développant le produit matriciel :

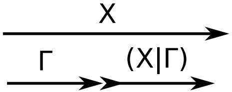
$$p(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\underline{\Gamma}} \kappa(\Gamma)\mathbb{P}_\Gamma(\underline{X})$$

$$\kappa(\Gamma) = \frac{A_{\Gamma_0,\Gamma_N}}{\mathcal{L}\left(\mathcal{E}^n\right)}\mathcal{E}_{\Gamma_0,\Gamma_1}\ldots\mathcal{E}_{\Gamma_{n-1},\Gamma_n} \quad \mathbb{P}_\Gamma(\underline{X}) = \mathcal{P}_{\Gamma_0,\Gamma_1}(x_1)\ldots\mathcal{P}_{\Gamma_{n-1},\Gamma_n}(x_n)$$

- Γ: chaîne d'indices dans la matrice $\mathcal{R}$
- $\underline{\Gamma}$: vecteur aléatoire caché : chaîne de Markov cachée

Modèle de Markov cachée

Séparation des sources de hasard en 2 niveaux distincts.



Chaîne de Markov cachée Γ

$$\mathbb{P}(\Gamma_k = j | \Gamma_{k-1} = i) = \mathcal{E}_{i,j} \frac{\left(\mathcal{E}^{n-k}\right)_{j,\Gamma_n}}{\left(\mathcal{E}^{n-k+1}\right)_{i,\Gamma_n}}.$$

$$\mathbb{P}(\Gamma_0 = i, \Gamma_n = j) = \frac{\mathcal{A}_{i,j}(\mathcal{E}^n)_{i,j}}{\mathcal{L}\left(\mathcal{E}^n\right)}.$$

Densité de probabilité conditionnelle $(\underline{X}|\Gamma)$

$$\mathbb{P}\left(\underline{X}|\Gamma\right) = \prod_k \mathcal{P}_{\Gamma_k, \Gamma_{k+1}}(x_k)$$

$(\underline{X}|\Gamma)$ variables aléatoires indépendantes

- Chaîne de Markov non-homogène
- $\mathcal{E} \Rightarrow$ structure du graphe des transitions de la chaîne Γ

Représentation duale

Représentation matricielle

- Utile pour calculer les propriétés statistiques

Modèle à chaîne de Markov cachée

- Utile pour la synthèse

Outline

1. Introduction: Du modèle ASEP aux Hidden Markov Models
2. Dualité représentation matricielle/ Modèle à chaîne de Markov cachée
   - Représentation matricielle
   - Chaîne de Markov cachée
3. Propriétés statistiques
   - Corrélation
   - Stationnarité
4. Construction de vecteurs aléatoires
   - Construction de série temporelle
   - Construction de vecteur aléatoire
5. Lois limites pour la somme
   - Introduction
   - Cas primordiaux
   - Cas général
6. Conclusion

Dépendance: $\mathcal{E}$ avec une valeur propre dominante

- Valeurs propres de $\mathcal{E}$: λ_i
- Valeur propre dominante λ_1: $\forall i \neq 1, |\lambda_1| > |\lambda_i|$
- E_i matrice de projection sur l'espace propre associé à λ_i.

$$\mathbb{E}[X_k X_l] \approx \sum_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{l-k-1} \frac{\mathcal{L}(E_1 M(1) E_j M(1) E_1)}{\lambda_1 \mathcal{L}(E_1)},$$

Dépendances

Somme de au plus $d-1$ exponentielles décroissantes d'échelles de temps $\tau_j = (\ln|\lambda_j| - \ln|\lambda_1|)^{-1}$

Dépendance: $\mathcal{E} = \mathrm{I} + H$

- H matrice nilpotente d'ordre $p+1$ ($H^p \neq H^{p+1} = 0$)
- Valeur propre dominante $\lambda_1 = 1$ de multiplicité $p+1$

$$n \to +\infty, \quad \mathbb{E}\left[X_k^{q_1} X_l^{q_2}\right] \approx \sum_{i+j+m=p}$$

$$\frac{(p)!}{(i)!(m)!(j)!} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{l-k}{n}\right)^j \left(1 - \frac{l}{n}\right)^m \frac{\mathcal{L}\left(H^i M\left(q_1\right) H^j M\left(q_2\right) H^m\right)}{\mathcal{L}\left(H^p\right)}$$

Corrélation à longue portée (sur le système entier).

Caractérisation de la corrélation

- $\mathcal{E}$: Valeur propre dominante de multiplicité m_{λ_1}
- Si $m_{\lambda_1} = 1$: corrélation à courte portée
- Si $m_{\lambda_1} > 1$: Blocs de Jordan associés J_k
  - J_k diagonaux : corrélation constante
  - Un seul bloc J_1 non diagonal : corrélation polynomiale à longue portée

Stationnarité

Condition suffisante

$$[\mathcal{A}^T, \mathcal{E}] \equiv \mathcal{A}^T\mathcal{E} - \mathcal{E}\mathcal{A}^T = 0.$$

Distribution marginale

$$\mathbb{P}(X_k = x) = \frac{\mathcal{L}\left(\mathcal{R}(x)\mathcal{E}^{n-1}\right)}{\mathcal{L}\left(\mathcal{E}^n\right)}$$

Densité de probabilité jointe partielle

$$\mathbb{P}(X_{k_1} = x_1, \ldots X_{k_r} = x_r) = \frac{1}{\mathcal{L}\left(\mathcal{E}^n\right)}$$

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{R}(x_1)\mathcal{E}^{k_2-k_1-1}\mathcal{R}(x_2)\ldots\mathcal{E}^{k_r-k_{r-1}-1}\mathcal{R}(x_r)\mathcal{E}^{n-(k_r-k_1)-1}\right)$$

Outline

1. Introduction: Du modèle ASEP aux Hidden Markov Models
2. Dualité représentation matricielle/ Modèle à chaîne de Markov cachée
   - Représentation matricielle
   - Chaîne de Markov cachée
3. Propriétés statistiques
   - Corrélation
   - Stationnarité
4. Construction de vecteurs aléatoires
   - Construction de série temporelle
   - Construction de vecteur aléatoire
5. Lois limites pour la somme
   - Introduction
   - Cas primordiaux
   - Cas général
6. Conclusion

Synthèse

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\mathcal{L}\left(\mathcal{R}(x_1) \ldots \mathcal{R}(x_n)\right)}{\mathcal{L}\left(\mathcal{E}^n\right)}$$

Comment choisir

- d ?
- $\mathcal{E}$?
- $\mathcal{P}$?
- $\mathcal{A}$?

Contraintes

Contraintes classiques

- Distribution marginale : $\mathbb{P}_S$
- Fonction d'autocovariance: $c_{1,1} \equiv \mathbb{E}[X_0 X_t] - \mathbb{E}[X_0]\,\mathbb{E}[X_t]$
- Fonctions de dépendance (d'ordre supérieur) :
  $c_{q_1,q_2}(t) \equiv \mathbb{E}\left[X_0^{q_1} X_t^{q_2}\right] - \mathbb{E}\left[X_0^{q_1}\right]\mathbb{E}\left[X_t^{q_2}\right]$
- Limitations: sommes de r exponentielles d'échelles de temps θ_k d'amplitudes $\beta(q_1, q_2)$

$$c_{q_1,q_2}(t) = \sum_{k=1}^{r} \mathfrak{Re}\left\{\beta(q_1, q_2)_k \theta_k^t\right\}$$

Choix de d, $\mathcal{A}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad J_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E} = \sum_k \alpha_k J_d^k$$

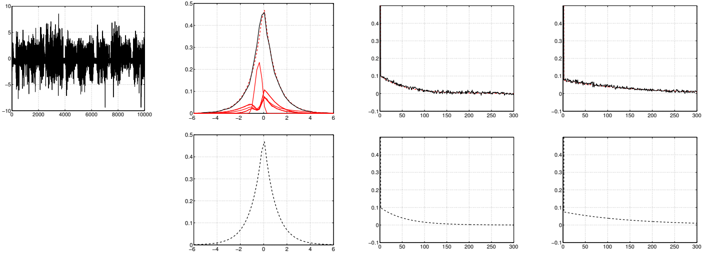
- Stationarité : $[\mathcal{A}^T, \mathcal{E}] = 0$
- Fonctions de dépendances : $\underline{\alpha} = \mathcal{F}(\underline{\tilde{\theta}})$

Objectifs $\Rightarrow$ Paramètres libres du modèle

- $r \Rightarrow d$
- $\theta \Rightarrow \alpha$
- $\beta \Rightarrow M(q)$
- $\mathbb{P}_S \Rightarrow \mathcal{P}$

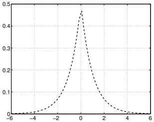
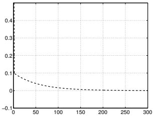
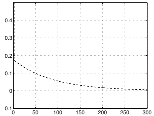
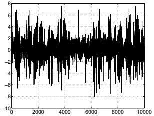
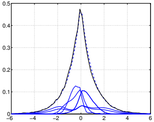
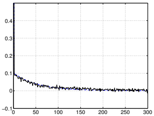
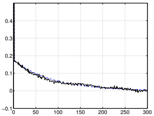
Exemples de séries temporelles stationnaires.

Réalisation | Marginales | Corrélation | Corr. des carrés



Cible

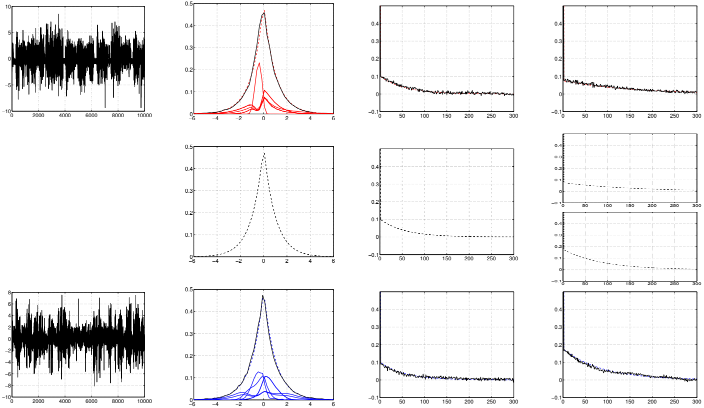
Exemples de séries temporelles stationnaires.

	Réalisation	Marginales	Corrélation	Corr. des carrés
Cible				
				

Exemples de séries temporelles stationnaires.

Réalisation | Marginales | Corrélation | Corr. des carrés

Cible



Exemple de vecteurs aléatoires

- Distributions trivariées
- Généralisation de la structure en produit de matrice

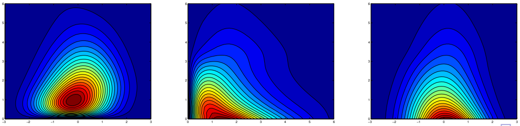
$$p(x_1, x_2, x_3) = \frac{\mathcal{L}\left(\mathcal{R}_1(x_1)\mathcal{R}_2(x_2)\mathcal{R}_3(x_3)\right)}{\mathcal{L}\left(\mathcal{E}^n\right)}$$

- Distribution marginale choisies a priori :
  - p_1 gaussienne
  - p_2 distribution gamma $\alpha = 2$
  - p_3 distribution exponentielle
- Inter-covariance $\mathbb{E}\left[X_i X_j\right]$ fixée a priori:

Distribution partielle bivariée :

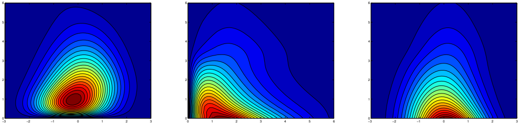
$p_{1,2}$ $p_{2,3}$ $p_{1,3}$

$\underline{X}$



$p_{1,2}$ $p_{2,3}$ $p_{1,3}$

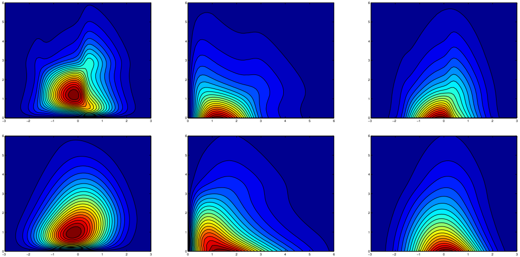
$\underline{X}$



$p_{1,2}$ $p_{2,3}$ $p_{1,3}$

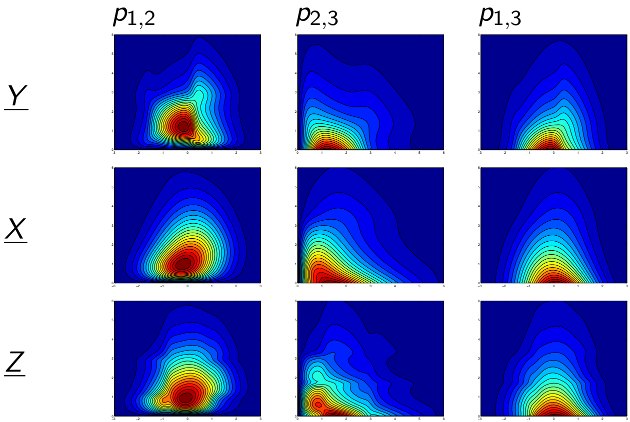
$\underline{Y}$

$\underline{X}$



$\underline{X}$, $\underline{Y}$

- Même marginale
- Même corrélation
- Corr. des carrés differente



$\underline{X}, \underline{Y}$

- Même marginale
- Même corrélation
- Corr. des carrés differente
- (pdf jointe différente)

$\underline{X}, \underline{Z}$

- Même marginales
- Même corrélation
- Même corr. des carrés
- pdf jointe différente

- Contrôle fin sur la structure de dépendance
- Construction de séries temporelles stationnaires et de vecteurs aléatoires
- arxiv:1203.4500 (TSP en cours de publication) , arxiv:1204.3047 (ICASSP proceedings)

Outline

1. Introduction: Du modèle ASEP aux Hidden Markov Models
2. Dualité représentation matricielle/ Modèle à chaîne de Markov cachée
   - Représentation matricielle
   - Chaîne de Markov cachée
3. Propriétés statistiques
   - Corrélation
   - Stationnarité
4. Construction de vecteurs aléatoires
   - Construction de série temporelle
   - Construction de vecteur aléatoire
5. Lois limites pour la somme
   - Introduction
   - Cas primordiaux
   - Cas général
6. Conclusion

Somme de vecteur aléatoire

Somme

$$S\left(\underline{X}\right) = \sum_i X_i$$

- Somme de variables aléatoires corrélées et non-identiques
- Équivalent de la loi des grands nombres ?
- Équivalent du théorème central limite ?

Deux voies possibles:

- Représentation matricielle
- Modèle à chaîne de Markov cachée

Somme de vecteur aléatoire

Somme

$$S\left(\underline{X}\right) = \sum_i X_i$$

- Somme de variables aléatoires corrélées et non-identiques
- Équivalent de la loi des grands nombres ?
- Équivalent du théorème central limite ?

Deux voies possibles:

- Représentation matricielle
- Modèle à chaîne de Markov cachée

Séparation des sources de hasard

- Pour un Γ fixé, $(\underline{X}|\Gamma)$ est indépendant

Distribution conditionnelle de $S(\underline{X}|\Gamma)$

- $S(\underline{X}|\Gamma) = \sum_{i,j=1}^{d} \sum_{k=1}^{n\nu_{i,j}} X_{k;i,j}$
- $\nu_{i,j}$: fraction de transitions de i vers j:

$$\underline{\nu} = \left(\frac{\#\{k / \Gamma_k = i, \Gamma_{k+1} = j\}}{n} \right)_{i,j}$$

- $X_{k;i,j}$ i.i.d. de lois $\mathcal{P}i, j$

- $S(\underline{X}|\Gamma)$ dépend seulement de $\underline{\nu}$ et pas des détails fins de Γ

Résultat de convergence

Loi limite pour $S(\underline{X}|\underline{\nu})$

$$f_n\left(S\left(\underline{X}|\underline{\nu}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\to}} \mathcal{L}_{\underline{\nu}}$$

Loi limite pour $\underline{\nu}$

$$\underline{\nu} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\to}} \mathbb{P}(\underline{\nu})$$

$$\Downarrow$$

Loi limite pour $S(\underline{X})$

$$f_n\left(S(\underline{X})\right) \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\to}} \int \mathbb{P}\left(\underline{\nu}\right) \mathcal{L}_{\nu} d\underline{\nu}$$

- f_n fonction de mise à l'échelle :
  - Loi des grands nombres : $f_n(X) = \frac{X}{n}$
  - Théorème central limite : $f_n(X) = \frac{X-nm}{\sqrt{n}}$
- $\mathcal{L}_{\nu}$: densité de probabilité dépendante de ν

Convergence conditionnelle pour la moyenne

- Moyenne:

$$\frac{S\left(X|\Gamma\right)}{n} = \sum_{i,j} \nu_{i,j} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n\nu_{i,j}} X_{k;i,j}}{n\nu_{i,j}} \right)$$

- Loi des grands nombres pour des variables aléatoires i.i.d. :

$$\frac{\sum_{k=1}^{\nu_{i,j}n} X_{k;i,j}}{n\nu_{i},j} \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\to}} \mathbb{E}\left[X_{i,j}\right]$$

- Convergence conditionnelle :

$$\frac{S(\underline{X}|\Gamma)}{n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\to}} \sum_{i,j} \nu_{i,j} \mathbb{E}\left[X_{i,j}\right]$$

Extension de la loi des grands nombres

Loi des grands nombres conditionnelle

$$\frac{S(\underline{X}|\Gamma)}{n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} \sum_{i,j} \nu_{i,j}\mathbb{E}\left[X_{i,j}\right]$$

Extension de la loi des grands nombres

$$\frac{S}{n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} \int \mathbb{P}\left(\underline{\nu}\right)\delta\left(x-\sum_{i,j}\nu_{i,j}\mathbb{E}\left[X_{i,j}\right]\right)d\underline{\nu}$$

Remarque: Si $\forall\left(i,j\right),\mathbb{E}\left[X_{;i,j}\right]=m$, $\frac{S}{n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} \delta\left(x-m\right)$. Par conséquent, on retrouve un équivalent à la loi standard des grands nombres.

Extension du théorème central limite

Hypothèse: $\forall (i,j), \mathbb{E}[X_{i,j}] = m$.

Théorème central limite conditionnel

$$\frac{S(\underline{X}|\Gamma) - mn}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}_{0,\sum \nu_{i,j}\sigma_{i,j}^2}$$

où $\sigma_{i,j}^2 = \mathbb{E}\left[(X_{i,j} - m)^2\right]$ et $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$ est la distribution gaussienne de variance σ^2 et moyenne μ.

Extension du théorème central limite

$$\frac{S - mn}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \int \frac{\mathbb{P}(\underline{\nu})}{\sqrt{2\pi \sum_{i,j} \nu_{i,j}\sigma_{i,j}^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sum_{i,j}\nu_{i,j}\sigma_{i,j}^2}} d\underline{\nu}$$

Distribution de ν

- Comment $\underline{\nu}$ est distribué ?
- Difficulté : Γ est une chaîne de Markov non-homogène.

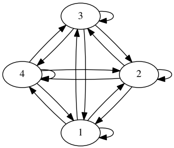
Trois sous-classes importantes :

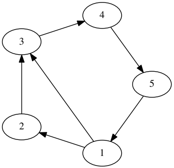
- $\mathcal{E}$ irréductible (corrélation à courte portée)
- $\mathcal{E}$ homothétie (corrélation constante)
- $\mathcal{E}$ "irréversible linéaire"(corrélation polynômiale à longue portée)

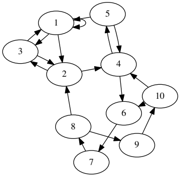
$\mathcal{E}$ irréductible

Matrice irréductible

$\mathcal{E}$ irréductible apériodique $\Leftrightarrow \exists k,\ \forall i,j,\ \mathcal{E}^k_{i,j} > 0$







- $\mathcal{E}$ irréductible $\Rightarrow$ une seule valeur propre dominante $\Rightarrow$ Corrélation à courte portée
- Loin de son dernier point, Γ est approximativement homogène.

$\mathcal{E}$ irréductible : Loi limite pour $\underline{\nu}$

Convergence vers la mesure invariante de la chaîne

$$\nu_{i,j} \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\to}} c_{i,j}$$

Extension de la loi classique des grands nombres et du théorème central limite :

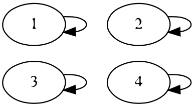
Loi des grands nombres $\frac{S}{n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\to}} \sum_{i,j} c_{i,j}\mathbb{E}\left[X_{;i,j}\right]$

Théorème central limite : $(S - nm)/\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\to}} \mathcal{N}_{0,\sum c_{i,j}\sigma^2_{i,j}}$

Loi limite standard.

$\mathcal{E}$ homothétie

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$



- Pour tout k, $\Gamma_k = \Gamma_0$
- Corrélation constante
- $\mathbb{P}(\Gamma_0 = i) = \frac{\mathcal{A}_{i,i}}{\sum_k \mathcal{A}_{k,k}}$

Convergence en distribution de $\underline{\nu}$

$$\nu_{i,j} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\to}} \sum \mathbb{P}(\Gamma_0 = i)\, \delta\left(x - \mathbb{E}\left[X_{i,i}\right]\right)$$

$\mathcal{E}$ homothétie: lois limites

Extension de la loi des grands nombres

$$\frac{S}{n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\to}} \sum_i \mathbb{P}\left(\Gamma_0 = i\right) \delta\left(x - \mathbb{E}\left[X\right]_{i,i}\right)$$

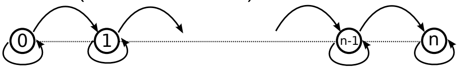
Extension du théorème central limite

$$\frac{S - nm}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\to}} \sum_i \frac{\mathbb{P}\left(\Gamma_0 = i\right)}{\sqrt{2\pi\sigma_{i,i}^2}} e^{-x^2/(2\sigma_{i,i}^2)}$$

Lois limites non-standard : Mélange discret de lois limites standard.

$\mathcal{E}$ "irréversible linéaire"

$$\mathcal{A}_{i,j} = 1/d \qquad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \end{pmatrix}$$



Propriétés statistiques de Γ

- Tous les chemins Γ acceptables sont équiprobables
- $i \neq j$, $\nu_{i,j} \underset{n \to +\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\to}} 0$
- Corrélation polynomiale à longue portée

Convergence en distribution de $\nu_{i,i}$

$$(\nu_{i,i})_{i \in 1,\ldots,n} \underset{n \to +\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\to}} \frac{1}{(d-1)!} \delta \left(\sum_i \nu_{i,i} - 1 \right)$$

$\mathcal{E}$ "irréversible linéaire" : Lois limites

Extension de la loi des grands nombres

$$\frac{S}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} \frac{1}{(d-1)!} \int \delta\left(\sum_i \nu_{i,i} - 1\right) \delta\left(x - \sum_{i,j} \nu_{i,j} \mathbb{E}\left[X_{i,j}\right]\right) d\underline{\nu}$$

Extension du théorème central limite

$$\frac{S - mn}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} \frac{1}{(d-1)!} \int \frac{\delta\left(\sum_i \nu_{i,i} - 1\right)}{\sqrt{2\pi \sum_i \nu_{i,i} \sigma_{i,i}^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sum_i \nu_{i,i}\sigma_{i,i}^2}} d\underline{\nu}$$

Lois limites non-standards : Mélange continu de lois limites standards.

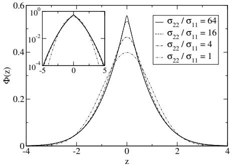
Exemple pour $d = 2$

Extension de la loi des grands nombres

$$\frac{S}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} \frac{1}{\left|\mathbb{E}\left[X_{1,1}\right] - \mathbb{E}\left[X_{2,2}\right]\right|} \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[\mathbb{E}\left[X_{1,1}\right], \mathbb{E}\left[X_{2,2}\right]\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Extension du théorème centrale limite

$$\frac{S - mn}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi(\alpha\sigma_{1,1}^2 + (1-\alpha)\sigma_{2,2}^2)}} e^{-\frac{x^2}{2(\alpha\sigma_{1,1}^2 + (1-\alpha)\sigma_{2,2}^2)}} d\alpha$$



Cas général

- Mélange complexe des trois comportements précédents
- Lois limites non-standards : Mélange discret de mélanges continus de lois limites standards.
- Résultats similaires pour les extrêmes
- arxiv:1304.5406 , plus d'articles en préparation

Outline

1. Introduction: Du modèle ASEP aux Hidden Markov Models
2. Dualité représentation matricielle/ Modèle à chaîne de Markov cachée
   - Représentation matricielle
   - Chaîne de Markov cachée
3. Propriétés statistiques
   - Corrélation
   - Stationnarité
4. Construction de vecteurs aléatoires
   - Construction de série temporelle
   - Construction de vecteur aléatoire
5. Lois limites pour la somme
   - Introduction
   - Cas primordiaux
   - Cas général
6. Conclusion

Perspective: Fonctions de grande déviations

Travail en cours : Fonction de grande déviation pour les vecteurs aléatoires à représentation matricielle

- Représentation matricielle plus adaptée
- En collaboration avec Hugo Touchette (NiThPE, Université de Stellenbosh)
- Résultats préliminaires:
  - $\mathcal{E}$ irréductible : fonction de grande déviation "standard"
  - $\mathcal{E}$ diagonale : fonction de déviation non-convexe
  - $\mathcal{E}$ "irréversible linéaire" : fonction de grande déviation avec une branche plate

Représentation duale

Représentation matricielle

- Propriétés statistiques
- Fonction de grande déviations

Représentation par modèle à chaîne de Markov cachée

- Synthèse
- Loi limites pour la somme (et le maximum)